

Lecher-System in einer Schutzhülle

Von RICHARD GANS

Aus dem Instituto de Fisica, La Plata (Argentinien)

(Z. Naturforschg. 3a, 519—521 [1948]; eingegangen am 30. April 1948)

Herrn Geheimrat Arnold Sommerfeld zum 80. Geburtstage gewidmet

Die wechselseitige Kapazität der beiden Drähte eines Lecher-Systems in einer Schutzhülle wird abgeleitet. Die erreichte Näherung ist wesentlich besser als die von Breisig angegebene.

Zur Vermeidung äußerer Einflüsse steckt man für genaue Messungen ein Lecher-System in ein Schutzrohr¹. Da man zur Auswertung der Beobachtungen die wechselseitige Kapazität der beiden Drähte braucht, soll diese im folgenden abgeleitet werden. Es handelt sich also um die Lösung der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ mit den Randbedingungen $\Phi = \pm U$ (constant) an r_1 und r_2 und $\Phi = 0$ an R (s. Abb. 1). Das Verfahren ist das folgende: Man vernachlässigt beim ersten Schritt die Bedingung an der Hülle R . Dann ist bekanntlich das Potential der reelle Teil von

$$\chi' = \log \frac{z + c}{z - c}. \quad (1)$$

Den Faktor $-2e$ (e Ladung der Längeneinheit) unterdrücken wir und fügen ihn erst am Schluß wieder hinzu. Dabei sind die Pole $\pm c$ wechselseitig die Bilder voneinander an den Kreisen r_1 und r_2 (Apollonius), und es gilt (s. Abb. 1)

$$c^2 = D^2 - r^2. \quad (2)$$

Da dieses Potential auf R nicht Null wird, müssen wir zu Gl. (1) hinzufügen

$$\chi'' = -\log \frac{z + g}{z - g}, \quad (3)$$

wobei g das Bild von c in R ist, d. h.²

$$g = R^2/c. \quad (4)$$

Die Funktion $\chi' + \chi''$ wird nun aber nicht äquipotential auf r_1 und r_2 . Deshalb haben wir im drit-

¹ S. z. B. Langen, Telefunken-Ztg., Heft 83, S. 72.

² Eigentlich muß in Gl. (3) \bar{z} statt z stehen. Da uns aber nur der reelle Teil interessiert, der symmetrisch bezüglich der x -Achse ist, dürfen wir z anstatt \bar{z} setzen.

ten Schritt g und $-g$ sowohl an r_1 wie an r_2 zu spiegeln und diese Polpaare an r_1 und r_2 weiter immer hin und her zu spiegeln. Damit hat aber das neue Potential die Eigenschaft verloren, an R

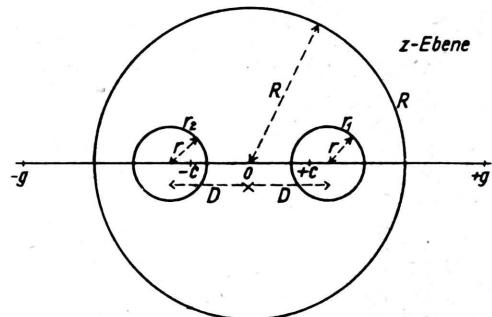


Abb. 1

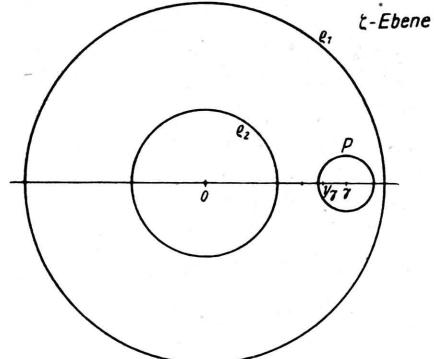


Abb. 2

Null zu werden, also muß man sämtliche im Innern von r_1 und r_2 liegenden Pole im vierten Schritt an R spiegeln. Dieses Spiel kann man fortsetzen. Das Verfahren vereinfacht sich aber wesentlich durch Anwendung einiger allgemeiner Sätze der Funktionentheorie.



Zunächst bilden wir die z -Ebene konform auf die ζ -Ebene ab durch

$$\zeta = \frac{z+c}{z-c}. \quad (5)$$

Dadurch gehen die Kreise r_1 und r_2 in zwei konzentrische Kreise ϱ_1 und ϱ_2 über, und es gilt

$$\varrho_2 = 1/\varrho_1 = \frac{c-(D-r)}{c+(D-r)}. \quad (6)$$

Der Ring $\varrho_2 < |\zeta| < \varrho_1$ entspricht in der z -Ebene dem Äußern von r_1 und r_2 , und der Kreis R der z -Ebene wird in den Kreis P übergeführt (Abb. 2), in dessen Innerem die den Punkten $\pm g$ entsprechenden Pole γ bzw. $1/\gamma$ liegen. Dabei ist

$$\gamma = \frac{g+c}{g-c} = \frac{R^2 + c^2}{R^2 - c^2}, \quad (7)$$

und es wird

$$\chi = \chi' + \chi'' = \log \zeta - \log \left(-\gamma \frac{\zeta - 1/\gamma}{\zeta - \gamma} \right). \quad (8)$$

$\log \frac{\zeta - 1/\gamma}{\zeta - \gamma}$ kann man für $|\zeta| < 1/\gamma$ (und a fortiori $|\zeta| < \gamma$) in eine Reihe entwickeln und erhält aus Gl. (8)

$$\chi = \log \zeta + \log(-\gamma) + [z_1 \zeta + z_2 \zeta^2 + z_3 \zeta^3 + \dots]$$

mit

$$z_1 = \gamma - 1/\gamma;$$

$$z_2 = \frac{1}{2} (\gamma^2 - 1/\gamma^2); \quad (9)$$

$$z_3 = \frac{1}{3} (\gamma^3 - 1/\gamma^3); \dots,$$

so daß der reelle Teil von χ für $\varrho = \varrho_2$ wird

$$\Phi_2 = \log \varrho_2 + \log \gamma + [z_1 \varrho_2 \cos \psi + z_2 \varrho_2^2 \cos 2\psi + \dots]. \quad (10 \text{ a})$$

Analog entwickle man $\log \frac{\zeta - 1/\gamma}{\zeta - \gamma}$ für $|\zeta| > \gamma$ (und a fortiori $|\zeta| > 1/\gamma$); man erhält

$$\chi = \log \zeta - \log(-\gamma) + [z_1/\zeta + z_2/\zeta^2 + z_3/\zeta^3 + \dots],$$

so daß der reelle Teil für $\varrho = \varrho_1$ wird

$$\Phi_1 = \log \varrho_1 - \log \gamma - \left[\frac{z_1}{\varrho_1} \cos \psi + \frac{z_2}{\varrho_1^2} \cos 2\psi + \dots \right]. \quad (10 \text{ b})$$

Da $\varrho_1 = 1/\varrho_2$ ist, wird $\Phi_1 = -\Phi_2$, wie es sein muß.

Der dritte Schritt besteht nun darin, daß wir diesem Potential eine Funktion ϕ''' überlagern, die im Ringgebiet regulär ist, und deren Randwerte sich von den eckigen Klammern in Gl. (10 a) bzw. (10 b) durch das Vorzeichen unterscheiden. Diese Funktion ist der reelle Teil von

$$\chi''' = A_1 (\zeta - 1/\zeta) + A_2 (\zeta^2 - 1/\zeta^2) + \dots \quad (11)$$

mit

$$A_1 = \frac{z_1 \varrho_2^2}{1 - \varrho_2^2};$$

$$A_2 = \frac{z_2 \varrho_2^4}{1 - \varrho_2^4}; \quad (12)$$

$$A_3 = z_3 \frac{\varrho_2^6}{1 - \varrho_2^6} \dots$$

Die Laurentsche Reihe [Gl. (11)] hat, wie es sein muß, die Eigenschaft, daß sie bei Vertauschung von ζ mit $1/\zeta$, d. h. nach Gl. (5) bei Vertauschung von z mit $-z$, das Zeichen wechselt.

Da in der z -Ebene $F(z) - F(R^2/z)$ für $|z| = R$ verschwindet (Abbildung durch reziproke Radien), wo F eine weitgehend willkürliche Funktion ist, gilt wegen Gl. (5), daß bei beliebiger Funktion k

$$k(\zeta) - k\left(\gamma \frac{\zeta - 1/\gamma}{\zeta - \gamma}\right)$$

auf dem Kreise P (dem Bild von R) verschwindet. Schreiben wir also Gl. (11) in der Form

$$\chi''' = f(\zeta) - f(1/\zeta) \quad (13)$$

mit

$$f(\zeta) = A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots, \quad (14)$$

so haben wir also zu χ hinzuzufügen

$$\chi^{IV} = -f\left(\gamma \frac{\zeta - 1/\gamma}{\zeta - \gamma}\right) + f\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\zeta - \gamma}{\zeta - 1/\gamma}\right) \quad (15)$$

um den reellen Teil von $\chi = \chi' + \chi'' + \chi''' + \chi^{IV}$ auf P wieder zu Null zu machen.

Der reelle Teil von χ^{IV} wird für $\varrho = \varrho_2$ nicht genau konstant, sondern durch eine Fouriersche cos-Reihe darstellbar sein. Da keiner der Pole von Gl. (15) innerhalb des Kreises vom Radius ϱ_2 liegt, erhalten wir das konstante Glied dieser Reihe nach dem Satz, daß der Mittelwert einer in einem Kreise regulären Funktion gleich dem Wert im Mittelpunkt ist, einfach indem wir in (15) $\zeta = 0$ setzen, also zu

$$f(\gamma) - f(1/\gamma) = A_1 z_1 + 2 A_2 z_2 + 3 A_3 z_3 + \dots$$

Wegen Gln. (14) und (9) und aus Gl. (12) ergibt sich, daß man zu dem aus Gl. (10a) folgenden konstanten Wert $\Phi_2 = \log \varrho_2 + \log \gamma$ zu addieren hat:

$$\frac{\kappa_1^2 \varrho_2^2}{1 - \varrho_2^2} + 2 \frac{\kappa_2^2 \varrho_2^4}{1 - \varrho_2^4} + 3 \frac{\kappa_3^2 \varrho_2^6}{1 - \varrho_2^6} + \dots,$$

so daß mit Hinzufügung des anfangs abgestoßenen Faktors $-2e$ wird

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & -2e \left[\log \varrho_2 + \log \gamma \right. \\ & \left. + \left(\frac{\kappa_1^2 \varrho_2^2}{1 - \varrho_2^2} + 2 \frac{\kappa_2^2 \varrho_2^4}{1 - \varrho_2^4} + 3 \frac{\kappa_3^2 \varrho_2^6}{1 - \varrho_2^6} + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Φ_1 unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen von Φ_2 .

Somit folgt in diesem Grade der Näherung für die wechselseitige Kapazität C der beiden Drähte

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} = & 4 \left[\log \frac{1}{\varrho_2} - \log \gamma \right. \\ & \left. - \left(\frac{\kappa_1^2 \varrho_2^2}{1 - \varrho_2^2} + 2 \frac{\kappa_2^2 \varrho_2^4}{1 - \varrho_2^4} + 3 \frac{\kappa_3^2 \varrho_2^6}{1 - \varrho_2^6} + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Die Konvergenz der hier auftretenden Reihe läßt sich leicht beweisen. Die in Gl. (17) vorkommenden Größen drücken sich durch die Dimensionen

des Systems (Abb. 1) folgendermaßen aus:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{c + (D - r)}{c - (D - r)}$$

mit $c = \sqrt{D^2 - r^2}$; $\gamma = \frac{R^2 + c^2}{R^2 - c^2}$,

während die z durch Gl. (9) gegeben sind.

Der Näherungsgrad der Gl. (17) ist für die meisten Zwecke ausreichend. Eine Fortführung und Ergänzung des Verfahrens soll an anderer Stelle erfolgen.

Als numerisches Beispiel wählen wir den von Lange¹ benutzten Apparat mit $D = 10$; $r = 5$; $R = 33$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 4(\ln 1/\varrho_2 - \ln \gamma) &= 4,71610, \\ 4 \left(\frac{\kappa_1^2 \varrho_2^2}{1 - \varrho_2^2} + 2 \frac{\kappa_2^2 \varrho_2^4}{1 - \varrho_2^4} + \dots \right) &= 0,02733, \end{aligned}$$

$$\text{somit nach (17)} \quad 1/C = 4,68877.$$

Der nächste, hier nicht behandelte Schritt würde nur noch eine Korrektion von $-0,00107$ geben, so daß endgültig folgt

$$1/C = 4,6877,$$

während eine von Breisig³ abgeleitete, schlechtere Näherungsformel, die Lange benutzt hat, $1/C = 4,61370$ ergibt, d. h. einen um 1,58% zu kleinen Wert.

Die Zeit und Kosten der Herstellung eines Präzisions-Lecher-Systems in einem Schutzrohr rechtfertigen die Ableitung unserer obigen Formel. Da sich ein Meßresultat häufig aus verschiedenen Einzelergebnissen zusammensetzt, sucht man jeden einzelnen Fehler möglichst herunterzudrücken. Man wird daher auch einen Fehler von 1,6% in der Kapazität durch Benutzung einer mangelhaften Formel vermeiden wollen.

³ F. Breisig, Theoretische Telegraphie, 2. Aufl., Braunschweig 1924, S. 68.